Übungen zum Vorkurs Mathematik

WiSe 2023/24

Dr. Björn O. Lange **Modul L**

Blatt 4 — Ausgabe: Di., 19.09.2023 — Abgabe:

Aufgabe 1: Inverse Matrix auf zwei verschiedenen Wegen

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} .$$

a) Invertieren Sie die Matrix A mit dem Gauss-Verfahren.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit der Cramerschen Regel für allgemeine Komponenten b_1, b_2 des Lösungsvektors $\vec{b}$. Vergleichen Sie mit $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ und bestimmen Sie A^{-1}.

Aufgabe 2: Länge (Norm) der Vektoren

Berechnen Sie die Länge der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3: Skalarprodukte

a) Berechnen Sie die Skalarprodukte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{v} \cdot \vec{w}$ mit

$$\vec{a} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{w} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

bitte wenden

Aufgabe 4: Kreuzprodukte

Wir definieren die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie

$$\vec{a} \times \vec{b} \quad , \quad \vec{b} \times \vec{c} \quad , \quad \vec{c} \times \vec{d} \quad , \quad \vec{d} \times \vec{a} \quad , \quad \vec{b} \times \vec{a} \quad , \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} \, .$$

b) Schwieriger: multiple Produkte

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \quad , \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \quad , \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad , \quad (\vec{a} \times \vec{d}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad ,$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \, .$$

Aufgabe 5: Zerlegung eines Vektors

Es sei

$$\vec{v} = \alpha \vec{n} + \vec{v}_\perp \, .$$

Wie müssen Sie α wählen, damit $\vec{v}_\perp$ senkrecht auf $\vec{n}$ steht?

Tipp: Nehmen Sie das Skalarprodukt der obigen Gleichung mit $\vec{n}$, und lösen Sie nach α auf. Sie sollten erhalten:

$$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \underbrace{\frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}}_{\alpha} \vec{n}$$

Ähnliche Aufgaben einer Kommission für Schulmathematik

Aufgabe 6:

Überprüfen Sie, ob das Viereck mit den Ecken $A(1|4|{-1})$, $B(8|8|4)$, $C(4|4|3)$, $D(-3|0|{-2})$ ein Parallellogramm ist.

Aufgabe 7:

Gegeben ist die Ebene

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie p so, daß $P(p|2|-2)$ in dieser Ebene liegt.

Aufgabe 8:

Wir definieren die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} .$$

a) Zeigen Sie, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{e}$, sodass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$ einen Quader aufspannen.

c) Bestimmen Sie den Winkel γ, den die beiden Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ einschliessen.

Aufgabe 9:

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

a) Geben Sie an, welche der obigen Vektoren kollinear zueinander sind.

b) Zu einem der Vektoren ist kein kollinearer Vektor angegeben. Geben Sie zu diesem Vektor einen kollinearen Vektor an.