Übungen zum Vorkurs Mathematik

WiSe 2023/24

Dr. Björn O. Lange

Modul G

Blatt 2 — Ausgabe: Mi., 06.09.2023 — Abgabe:

Aufgabe 1: Direkter Beweis

a) Seien a, b natürliche Zahlen. Beweisen Sie, daß die Zahl $x = 10a + b$ genau dann durch 7 teilbar ist, wenn die Zahl $y = a + 5b$ durch 7 teilbar ist. (Sie müssen beide Richtungen zeigen!)

b) Sei ausserdem $z = a - 2b$. Beweisen Sie, daß x genau dann durch 7 teilbar ist, wenn z durch 7 teilbar ist.

c) Untersuchen Sie, ob die Zahlen 105, 1001, 23112, und 84938 durch 7 teilbar sind.

Bonus: Können Sie noch andere Kriterien für die Teilbarkeit durch 7 konstruieren?

Aufgabe 2: Vollständige Induktion

Üben Sie den vollständige Induktionsbeweis an einigen der folgenden Beispiele. Hierbei sei n eine natürliche Zahl.

a)

$$\sum_{j=1}^{n} j \cdot j! = (n+1)! - 1$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

d)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$$

e)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

f)

$$(a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k = a^{n+1} - b^{n+1}$$

g)

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Aufgabe 3: Indirekter Beweis

a) Beweisen Sie mit der Methode des indirekten Beweises, daß die Zahl $\sqrt{3}$ keine rationale Zahl sein kann.

b) Sei $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ die geordnete Menge der Primzahlen, d.h. $\{2, 3, 5, \ldots\}$. Beweisen Sie, daß diese Menge nicht endlich viele Elemente haben kann, indem Sie die Zahl $q = p_1 p_2 \ldots p_N + 1$ untersuchen. Hier ist p_N die angeblich grösste Primzahl.

Tipp: Wenn zwei Zahlen ein gemeinsames Vielfaches besitzen, so tut dies auch die Differenz beider Zahlen.

Ähnliche Aufgaben einer Kommission für Schulmathematik

Aufgabe 4: Beweisverständnis

Im Folgenden lesen Sie einen Beweis dafür, daß für jede positive ungerade ganze Zahl n die Zahl $n^2 - 1$ durch 8 teilbar ist:

Sei n eine positive ungerade ganze Zahl. Dann können wir n schreiben als $n = 2m + 1$ mit einer nicht-negativen ganzen Zahl m. Damit gilt

$$n^2 - 1 = (2m+1)^2 - 1 = 4m^2 + 4m + 1 - 1 = 4m^2 + 4m = 4m(m+1)$$

Es muss entweder m oder $m + 1$ durch 2 teilbar sein. Also hat die Zahl $m(m + 1)$ den Teiler 2 und damit ist die Zahl $4m(m + 1)$ durch 8 teilbar.

a) Begründen Sie, warum entweder m oder $(m + 1)$ durch 2 teilbar sein muss.

b) Geben Sie an, an welcher Stelle zum ersten Mal ausgenutzt wurde, daß m ungerade ist.