Übungen zum Vorkurs Mathematik

WiSe 2023/24

Dr. Björn O. Lange **Modul G**

Blatt 1 — Ausgabe: Mi., 06.09.2023 — Abgabe:

Aufgabe 1:

Geben Sie für die logischen Aussagen

(i) $3x - 7 = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

(ii) $3x - 7 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

(iii) $3x - 7 = 2 \quad \Leftarrow \quad 3x = 9 \quad \Leftarrow \quad x = 3$

jeweils an, für welche der folgenden Aussagen sie als Begründung dienen können.

a) Die Lösungsmenge der Gleichung $3x - 7 = 2$ für x ist $\{3\}$.

b) 3 ist eine Lösung der Gleichung $3x - 7 = 2$ für x.

c) Höchstens 3 kann eine Lösung der Gleichung $3x - 7 = 2$ für x sein.

Aufgabe 2:

a) Man stelle jeweils die Wahrheitstafel auf.

(i) $A \wedge (B \vee C)$, (ii) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, (iii) $(\neg A) \vee (\neg B)$, (iv) $A \vee (\neg A)$

b) Man beweise jeweils die Äquivalenz durch Vergleich der Wahrheitstafeln beider Seiten.

(i) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, (ii) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

(iii) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$, (iv) $A \wedge (B \vee (\neg B)) \Leftrightarrow A$

Aufgabe 3:

Sei $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen. Man bestimme jeweils den Wahrheitswert der Aussage.

(a) $\forall x \in \mathbb{Z} : x > 0$, (b) $\exists x \in \mathbb{Z} : x > 0$,
(c) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z} : x > y$, (d) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$,
(e) $\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z} : x > y$, (f) $\exists x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$

Aufgabe 4:

Entscheiden Sie jeweils, ob die zweite Aussage die formale Verneinung der ersten Aussage ist. Falls das nicht der Fall sein sollte, geben Sie für beide Aussagen jeweils eine korrekte Verneinung an.

a) Die Zahl 4 ist durch 2 teilbar. – Die Zahl 4 ist durch 3 teilbar.

b) Die Zahl 6 ist durch 3 teilbar. – Die Zahl 6 ist nicht durch 3 teilbar.

c) Alle Zahlen sind gerade. – Alle Zahlen sind ungerade.

d) Jede gerade Zahl größer 2 läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen. – Es gibt eine gerade Zahl $n > 2$, so daß für Primzahlen p und q stets $p + q \neq n$ gilt.

Aufgabe 5:

Sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3\}$ sowie $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Man bilde die folgenden Mengen.

(a)	$A \cup B$,	(b)	$A \cap B$,	(c)	$(A \cup B) \cup C$,	(d)	$(A \cap B) \cap C$,
(e)	$(A \cup B) \cap C$,	(f)	$(A \cap B) \cup C$,	(g)	$A \setminus B$,	(h)	$B \setminus A$,
(i)	$(A \setminus B) \setminus C$,	(j)	$A \setminus (B \setminus C)$,	(k)	$A \times A$,	(l)	$A \times B$

Aufgabe 6:

Man entscheide jeweils, ob die Aussage gilt.

(a)	$1 \in \{1, 2\}$,	(b)	$3 \in \{1, 2\}$,	(c)	$\{1\} \in \{1, 2\}$,	(d)	$1 \in \emptyset$,
(e)	$\emptyset \in \{1, 2\}$,	(f)	$\{1\} \in \{\{1, 2\}\}$,	(g)	$\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$,	(h)	$1 \in \{\{1\}\}$,
(i)	$\{1, 2\} = \{2, 1\}$,	(j)	$\{1, 1\} = \{1\}$,	(k)	$\{1, \{1\}\} = \{1\}$,	(l)	$\{\emptyset\} = \emptyset$,
(m)	$\{1\} \subseteq \{1, 2\}$,	(n)	$\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$,	(o)	$1 \subseteq \{1, 2\}$,	(p)	$\emptyset \subseteq \{1, 2\}$

Ähnliche Aufgaben einer Kommission für Schulmathematik

Aufgabe 7: Welche der folgenden Aussagen gelten?

a) Aus $x^2 - 4 = 0$ folgt $(x + 2)(x - 2) = 0$.

b) $x^2 - 4 = 0$ gilt genau dann, wenn $(x + 2)(x - 2) = 0$.

c) Aus $x^2 - 4 = 0$ folgt $(x + 2) = 0$.

d) Aus $(x + 2) = 0$ folgt $x^2 - 4 = 0$.

Aufgabe 8: Zwischen welchen Zeilen ist keine Äquivalenz?

$$\begin{aligned} 3(x+2)^2 &= 27 \\ (x+2)^2 &= 9 \\ (x+2) &= \sqrt{9} \\ x+2 &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$