Übungen zum Vorkurs Mathematik

WiSe 2023/24

Dr. Björn O. Lange

Modul A

Blatt 6 — Ausgabe: Mi., 13.09.2023 — Abgabe:

Aufgabe 1: Einfache Umkehrfunktionen und deren Ableitung

Benutzen Sie den "Trick" aus der Vorlesung

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} ,$$

um die Ableitung der n-ten Wurzel zu berechnen.

Aufgabe 2: Ableitungen inverser Funktionen

Die trigonometrischen und Hyperbel-Funktionen haben sehr ähnliche Ableitungen. Zeigen Sie

a)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}\text{Arsinh } x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}\text{Arcosh } x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\arctan x &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx}\text{Artanh } x &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

bitte wenden

Aufgabe 3: Der Sekans

Neben den üblichen Winkelfunktionen gibt es auch noch Kehrwerte von ihnen, die einen eigenen Namen tragen. Zum Beispiel ist die Sekans-Funktion

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \ .$$

Sie besitzt für einen monotonen Zweig ebenfalls eine Umkehrfunktion, arcsec. Bestimmen Sie $\operatorname{arcsec}'(x)$.

Aufgabe 4: Eine komische Funktion

Gegeben ist eine harmlos aussehende Funktion f, die für alle reellen $x \neq 0$ definiert ist mit

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \ .$$

a) Diskutieren Sie, warum der Wert $x = 0$ durchaus mit aufgenommen werden kann.

b) Berechnen Sie $f'(x)$. Begründen Sie, warum $f'(0) = 0$ ist.

c) Wer sich traut, kann auch $f''(0)$ berechnen. In der Tat lässt sich argumentieren, daß alle Ableitungen an der Stelle $x = 0$ verschwinden.

Aufgabe 5: Zum Entspannen ...

... und als Vorarbeit zur Integralrechnung: Berechnen Sie die Ableitungen von der Funktion f mit

a) $f(x) = \exp(g(x))$

b) $f(x) = \ln(h(x))$ mit $h(x) > 0$

c) $f(x) = \sin^2(j(x))$