# Übungen zum Vorkurs Mathematik

WiSe 2023/24

Dr. Björn O. Lange **Modul A**

*Blatt 5* — Ausgabe: Mi., 13.09.2023 — Abgabe:

---

**Aufgabe 1:**

Sei $f$ eine Funktion, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, mit $f(x) = \ln|x|$. Zeigen Sie mit Fallunterscheidung, daß $f'(x) = 1/x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

**Aufgabe 2: Stetigkeit und Differenzierbarkeit**

Untersuchen Sie die Funktion $f$ mit $f(x) = |\sin x|$.

**a)** Was ist ihr maximaler Definitionsberech und minimaler Wertebereich?

**b)** Wie sieht ihr Graph aus?

**c)** Ist sie in allen Punkten stetig?

**d)** Welche Periode hat sie?

**e)** Beantworten Sie die gleichen Fragen diesmal für ihre Ableitung $f'(x)$.

**Aufgabe 3: Hyperbel-Funktionen**

Die Hyperbel-Funktionen sind definiert als

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad , \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad , \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \, .$$

**a)** Skizzieren Sie die Graphen von sinh, cosh, tanh. Untersuchen Sie dazu die Symmetrien unter $x \to -x$, Nullstellen und Singularitäten (falls vorhanden), und das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$.

**b)** Zeigen Sie, daß $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ist.

**c)** Berechnen Sie die Ableitungen der Hyperbel-Funktionen.

*bitte wenden*

**Aufgabe 4: Höhere Ableitungen**

Begründen Sie, daß die $n$-te Ableitung der folgenden Funktionen kompakt wiefolgt geschrieben werden können.

**a)** $$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \qquad \text{für } m > n \in \mathbb{N}$$

**b)** $$\frac{d^n}{dx^n} \ln x = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{x^n}$$

**c)** $$\frac{d^n}{dx^n} e^{kx} = k^n e^{kx}$$

**d)** $$\frac{d^n}{dx^n} a^x = a^x \ln^n a$$

**e)** $$\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

**f)** $$\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

**Aufgabe 5:**

Sei $\log_b$ die Logarithmus-Funktion zur Basis $b > 0$, d.h. $y = \log_b x$ ist gleichbedeutend mit $x = b^y$. Berechnen Sie die Ableitung

$$\frac{d}{dx} \log_b x \ .$$

## Ähnliche Aufgaben einer Kommission für Schulmathematik

**Aufgabe 6:**

Gegeben sei eine Funktion $f$ mit $f(x) = x \exp(-kx)$, $k \in \mathbb{R}_+$. Berechnen Sie den Extrempunkt von $f$ und zeigen Sie rechnerisch, daß es sich um ein Maximum handelt.