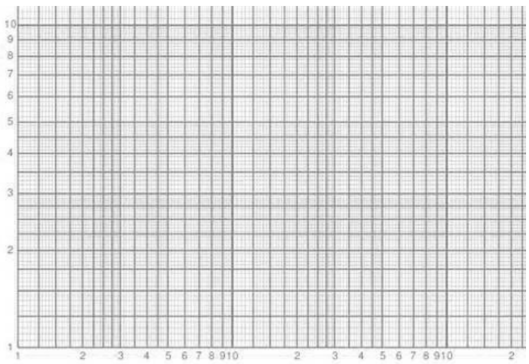
Übungen zum Vorkurs Mathematik

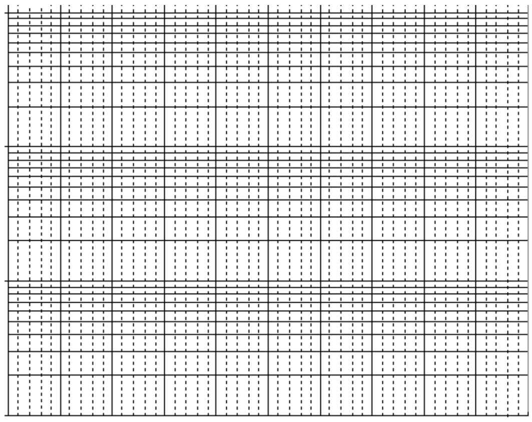
WiSe 2023/24

Dr. Björn O. Lange **Modul A**

Blatt 3 — Ausgabe: Di., 12.09.2023 — Abgabe:

Aufgabe 1: Logarithmisches Papier





a) Plotten Sie die Funktion $y(x) = 2\sqrt[3]{x}$ in dem log-log Papier auf der linken Seite. (Suchen Sie sich z.B. 5 Werte aus, die Sie einzeichnen.)

b) Warum sind Funktionen der Gestalt $f(x) = Ax^b$ immer gerade Linien auf doppelt-logarithmischem Papier?

c) Plotten Sie die Funktion $y(x) = 10e^{-3x/5}$ auf dem lin-log Papier auf der rechten Seite.

d) Warum sind $f(x) = Ae^{bx}$ auf einfach logarithmischem Papier gerade Linien?

e) Was für Funktionen sind Geraden auf log-lin Papier, also wo die x-Achse logarithmisch und die y-Achse linear ist?

Aufgabe 2: Exponentieller Wachstum

Eine (fiktive) Bakterienkultur wächst in einem Reagenzglas mit Nahrung. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 5 Sekunden.

a) Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Bakterienanzahl beschreibt.

b) Das Experiment beginnt um 12:00h mit einem nahezu leerem Glas. Es endet um 14:00h, als das Glas voll ist. Um wieviel Uhr war das Glas halbvoll?

bitte wenden

Aufgabe 3:

Ein Block radioaktiven Materials zerfällt nach dem Gesetz

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)} ,$$

wobei N_0 die Anzahl der radioaktiven Atome des Ausgangsmaterials zum Zeitpunkt t_0 ist.

a) Wenn $\lambda = 3 \cdot 10^{-2} \frac{1}{s}$ ist, wie groß ist dann die Halbwertszeit, also das Zeitintervall, in dem sich der Block halbiert?

b) Tatsächlich wollen Sie aber λ selbst bestimmen, d.h. sie messen $N(t)$ zu verschiedenen Zeitpunkten. Lösen Sie die obige Gleichung nach λ auf.

Aufgabe 4: Umkehrfunktion

Stellen Sie die Umkehrfunktion von $\tan(x)$ graphisch dar. Diese Funktion hat einen Definitions- und Wertebereich

$$\arctan : \mathbb{M}_1 \longrightarrow \mathbb{M}_2 .$$

Was sind diese Mengen $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$?

Der Arkustangens findet oft Anwendung, wenn ein unendlich großer Bereich auf einen endlichen Bereich bijektiv abgebildet werden soll.

Aufgabe 5: Punktweise Konvergenz und Stetigkeit

Wir betrachten die Funktionenschar

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + \exp(-nx)} .$$

a) Diskutieren Sie $f_1(x)$ in den Bereichen $x \approx 0$, $x \to \pm\infty$ und stellen Sie die Funktion graphisch dar.

b) Was ändert sich, wenn Sie f_2 anstelle von f_1 plotten?

c) Wir definieren die Funktion f durch

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) ,$$

d.h. für jedes x bilden Sie den Grenzwert der Folge $\{f_n(x)\}$. Geben Sie die Funktionswerte von $f(x)$ explizit an.

d) Sind die f_n stetig? Ist f stetig?

Ähnliche Aufgaben einer Kommission für Schulmathematik

Aufgabe 6:

Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2 + bx + 4$. Untersuchen Sie die Anzahl der reellen Nullstellen des Graphen von f in Abhängigkeit von b.

Aufgabe 7:

Die Geschwindigkeit eines Autos beträgt 20 m/s zu Beginn der Beobachtung. Innerhalb der nächsten 10 s nimmt die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand ab. Stellen Sie den Geschwindigkeitsverlauf im Intervall von $0s$ bis $10s$ grafisch dar und geben Sie einen Funktionsterm an, der die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Aufgabe 8:

Ermitteln Sie den Term einer Sinusfunktion, die den Tagesgang der Temperatur modelliert. Bestimmen Sie die Parameter aus den folgenden Angaben: Um 16:00 Uhr ist die Temperatur mit $25°C$ am höchsten. Nachts um 4:00 Uhr ist es mit $13°C$ am kältesten.

Aufgabe 9:

Gesucht ist der Term einer Polynomfunktion niedrigsten Grades mit den drei Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, deren Schaubild durch den Punkt $(0|3)$ geht.

Aufgabe 10:

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad , \quad g(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 2} \ .$$

Beschreiben Sie, was geschieht, wenn sich x der Zahl 2 nähert.