Beweise $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leq \sqrt{\frac{1}{2}n^3}+1$ für alle $n\in\mathbb{N}$

Proof: Vollst. Ind.

IA: $n=1$

$$\sum_{k=1}^{1}\sqrt{k}=\sqrt{1}=1$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}1^3}+1=1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}>1$$

✓

IV: Die Ungl. gelte für ein $n\in\mathbb{N}$, so folgt:

IS: $\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}=\sqrt{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leq \dots$

IV $\qquad\qquad$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{a+b}$

$$\leq \sqrt{n+1}+\sqrt{\tfrac{1}{2}n^3}+1 \leq \sqrt{n+1+\tfrac{1}{2}n^3}+1$$

addiere $\frac{3}{2}n^2$ unter $\sqrt{\cdot}$

$$<\sqrt{\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{3}{2}n^2+n+1}+1$$

NR:
$(n+1)^3$
$=n^3+3n^2+3n+1$

Schreibe $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, und bemerke $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}n$

$$\leq\sqrt{\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{3}{2}n^2+\tfrac{3}{2}n+\tfrac{1}{2}}+1$$

NR

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}(n+1)^3}+1$$

Also gilt Ungl. auch für $n+1$