Arik Heinss, M. Sc., Dr. M. Ensenbach Siegen, den 7. Juli 2022

Department Mathematik
Universität Siegen

# Übungsblatt 15 zur Analysis I

SS 2022

**Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte)**
Zeige: für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$

b) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(y)\sin(x)$

c) $1 + \cot(x)^2 = \frac{1}{\sin(x)^2}$ falls $x \notin \{z\pi | z \in \mathbb{Z}\}$

d) $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$ falls $x+y, x, y \notin \{k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$

**Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**
Bestimme die folgenden Grenzwerte mithilfe der Reihendarstellung:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin(x)-x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{\exp(x^4)-1}$

Hinweis zu b): forme Zähler und Nenner jeweils in eine Potenzreihe um, und erweitere so dass das nullte Glied der Reihen nicht null ist. Lies daraus den Grenzwert ab.

**Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Beweise:

a) Falls $f$ gerade ist, so ist $f'$ ungerade.

b) Falls $f$ ungerade ist, so ist $f'$ gerade.

(Eine Funktion ist gerade falls $f(-x) = f(x)$ und ungerade falls $f(-x) = -f(x)$.)

**Aufgabe 4 (4 Punkte)**
Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Zeige, dass $f$ auf dem ganzen Intervall differenzierbar ist und berechne die Ableitung.
Ist die Ableitung stetig?

**Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)**
Untersuche die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit am Punkt $x = 0$.

a) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{x}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{|x|}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x|x|$