Arik Heinss, M. Sc., Dr. M. Ensenbach Siegen, den 30. Juni 2022

Department Mathematik
Universität Siegen

Übungsblatt 14 zur Analysis I

SS 2022

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ endlich. Zeige, dass f beschränkt und gleichmässig stetig.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)

a) Zeige, dass die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmässig stetig ist. Gebe dazu explizit zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in [0, 2]$ mit $|x - y| < \delta$.
Ist f Lipschitz stetig?

b) Zeige, dass die Funktion $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ Lipschitz stetig ist. Ist g gleichmässig stetig?

Hinweis: die Formel $\sqrt{x - y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ könnte helfen.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig und $M \subseteq D$ beschränkt. Zeige, dass $f(M)$ beschränkt ist.

Aufgabe 4 (3+1 Punkte)
Sei $L, M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und sei $d = \inf\{|x - y| \,|\, x \in L,\ y \in M\}$ der *Abstand* von L und M.

a) Zeige: Sind L, M kompakt und disjunkt ($L \cap M = \emptyset$), so gilt $d > 0$.

b) Gib ein Beispiel dafür, dass die Aussage ohne Voraussetzung der Kompaktheit falsch ist.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)

a) Bestimme, ob es eine Zahl $x > 0$ gibt mit $e^x = x + 1$.

b) Zeige, dass für $x, y > 0$ die folgende Ungleichung gilt:
$$\frac{\log x + \log y}{2} \leq \log\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

c) Entscheide, ob der folgende Grenzwert existiert, und bestimme ihn gegebenenfalls:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}$$

Hinweis: vom 08.07 bis 10.07 findet am ENC-D ein Lernwochenende statt, an dem innerhalb von zwei Tagen der Stoff von Ana1/LA1 durchgearbeitet wird (Fr ab 18:00, Sa So ab 10:00 Uhr). Bei Interesse tragt euch bei der Fachschaft ein.