Arik Heinss, M. Sc., Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 12. Juni 2022

Übungsblatt 12 zur Analysis I

SS 2022

Aufgabe 1 (1.5+1.5+1.5+1.5 Punkte)
Entscheide, welche der folgenden Reihen konvergiert:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\sqrt{k^4+k}}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{3^k}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k+\frac{1}{k}}}{k}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei $\Omega_{3,7}$ definiert als die Menge aller Zahlen, deren Primfaktorzerlegung nur die Primzahlen 3 und 7 enthält, also $\Omega_{3,7} = \{n \in \mathbb{N} | \, \exists k, l \in \mathbb{N}_0 : \; n = 3^k 7^l\}$. Zeige:

$$\sum_{n \in \Omega_{3,7}} \frac{1}{n} = \frac{7}{4}$$

Hinweis: Es könnte sich als hilfreich erweisen, erstmal die Reihen über $\Omega_p = \{n \in \mathbb{N} | \, \exists k \in \mathbb{N}_0 : \; p^k = n\}$ für Primzahlen p zu untersuchen.

Aufgabe 3 (1.5 + 1.5 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeige:

a) Falls $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$.

b) Die Umkehrung stimmt nicht, falls $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ konvergiert muss $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ nicht konvergieren.

Aufgabe 4 (4+3 Punkte)

a) Zeige: ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} 2^i a_{2^i} \text{ konvergiert}$$

b) Zeige: Für $l, k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[l]{n}}\right)^k$ falls $k > l$, und divergiert andernfalls.

Hinweise: Zu a): Unterteile die a_i sinnvoll in Gruppen, so dass alle Elemente der Gruppe gemeinsam nach oben bzw unten abgeschätzt werden können.
Zu b): Benutze a), die geometrische Reihe 4.1.4 und mache eine geeignete Fallunterscheidung.
Wir werden später für rationale Zahlen $q = \frac{m}{n}$ das Exponentieren definieren als $x^q = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^l}$.
Mit dieser Aufgabe haben wir gezeigt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ genau dann konvergiert wenn $q > 1$. Somit könnte man die harmonische Reihe im gewissen Sinne als 'kleinste noch divergente Reihe' ansehen.