Arik Heinss, M. Sc., Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 09. Juni 2022

Übungsblatt 11 zur Analysis I

SS 2022

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)
Bestimme für die folgenden Definitionen von M jeweils die Menge aller Häufungspunkte, die Menge aller inneren Punkte, und entscheide ob die Menge offen/geschlossen/beides/keines von beiden ist.

a) $M = \mathbb{Q}$

b) $M = \mathbb{Z}$

c) $M = \{(-1)^m \frac{1}{n} \ \ |n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)
Sei $A \subseteq \mathbb{C}$.

a) Zeige, dass A° das grösste offene Set in A ist, das heisst, falls gilt $U \subseteq A$ und U offen, so folgt $U \subseteq A^{\circ}$.

b) Zeige, dass $\overline{A}$ das kleinste geschlossene Set ist, welches A enthält, das heisst, falls gilt $A \subseteq U$ und U geschlossen, so folgt $\overline{A} \subseteq U$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heisst zusammenhängend, wenn für $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x < y < z$ und $x, z \in M$ stets auch $y \in M$ gilt.
Man zeige, dass sich jede beschränkte, offene, zusammenhängende Menge als Intervall der Form (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben lässt.

Aufgabe 4 (2+3+1 Punkte)
Wir definieren den Rand einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ oder $A \subseteq \mathbb{C}$ als $\partial A = \overline{A} \setminus A^{\circ}$

a) Zeige: ∂A ist abgeschlossen.

b) Zeige: $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$

c) Finde für die vorige Aussage jeweils ein Beispiel für A und B, sodass '=' bzw '$\subset$' gilt.