Arik Heinss, M. Sc., Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 30. Mai 2022

Übungsblatt 10 zur Analysis I

SS 2022

Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Begründe oder gib ein Gegenbeispiel. (Alle Folgen seien reell).

a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $M \in \mathbb{R}$ mit $\limsup_{n\to\infty} a_n < M$ sogilt $a_n < M$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Wenn eine Folge monoton und beschränkt ist so konvergiert sie.

c) Wenn eine Folge nicht monoton ist, so konvergiert sie nicht.

d) Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, so konvergiert sie nicht.

Aufgabe 2 (1+1.5+1.5+1.5+1.5 Punkte)

a) Für die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien die Glieder folgend definiert. Bestimme alle Häufungspunkte und, falls existent, Limes superior und Limes inferior.

$$a_n = n \qquad b_n = 2(-1)^n + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad c_n = \frac{3^n+(-2)^n}{4^{n+1}+(-3)^n}$$
$$d_n = \frac{2^{-n}+(-1)^n}{1+3^{-n}} \qquad e_n = Re((2-\frac{1}{n})i^n)$$

b) Gib eine Folge an, welche unbeschränkt ist und genau zwei Häufungspunkte hat.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen.

a) Zeige, dass die folgende Ungleichung gilt, falls die jeweiligen Limes existieren.
$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty}(a_n) + \limsup_{n\to\infty}(b_n)$

b) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- a_n konvergiert und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
- Der Limes Superior und der Limes Inferior existieren beide und es gilt
$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$

Aufgabe 4 (5×1.5 Punkte)

Bestimme, ob die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und gib ggf. den Grenzwert an.

a) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ c) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3+1}$

d) $a_1 = 0.9, \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$ e) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{2^n}}$