Arik Heinss, M. Sc., Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 24. Mai 2022

Übungsblatt 9 zur Analysis I

SS 2022

Aufgabe 1 (1+1+1 Punkte)
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann, wenn $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

b) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren, dann divergieren auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2 (1.5+1.5+1.5+1.5 Punkte)
Bestimme für $n \to \infty$ die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

a) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ für $a, b > 0$

b) $\frac{i}{1+in}$

c) $\frac{2^n}{n}$

d) $\frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$, und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Funktion. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert über $b_k = a_{g(k)}$. Zeige, dass b_k konvergiert mit

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeige dass für die Folge $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$ gilt: M_n konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Hinweis: Für gegebenes $\epsilon > 0$, spalte die Summe sinnvoll in zwei Teile und schätze diese getrennt ab.