Arik Heinss, M. Sc., Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 19. Mai 2022

# Übungsblatt 8 zur Analysis I

SS 2022

**Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**
Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige die folgenden Aussagen.

a) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$

b) $\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| = 1 \;\Rightarrow |w| = 1$ oder $|z| = 1$

**Aufgabe 2 (3 Punkte)**
Berechne die Nullstellen der komplexen Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\; z \mapsto z^2 + (4-2i)z - 6i$$

mithilfe von quadratischer Ergänzung. (Hinweis: Beweis von Lemma 2.5.10)

**Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**
Gegeben sei die reelle Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\} \to \mathbb{R},\; x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Bestimme die Wertemenge von $f$ und untersuche $f$ auf Monotonie und Injektivität.

**Aufgabe 4 (3 Punkte)**
Zeige anhand der Definition, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, mit

$$a_n = \frac{n+3}{n^3+1}$$

Das heisst, zeige, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_m| < \varepsilon$ für $m \geq N_\varepsilon$.

**Aufgabe 5 (2+2 Punkte)**
Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heisst algebraisch, falls es eine Nullstelle einer Polynomfunktion ist dessen Koeffizienten alle in $\mathbb{Q}$ liegen und die nicht identisch 0 ist.

a) Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge solcher Polynome vom Grad $n$ abzählbar ist.

b) Zeige, dass die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist. (Hinweis: Satz 2.3.7)