

Übungsblatt 7 zur Analysis I

SS 2022

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Gib eine begründete Antwort:

- a) Sei $x \neq 0$ rational und y irrational.
- Kann $x + y$ rational sein?
 - Kann $x \cdot y$ rational sein?
- b) Sei x und y irrational.
- Kann $x + y$ rational sein?
 - Kann $x \cdot y$ rational sein?

Aufgabe 2 (3+3+3 Punkte)

Untersuche die folgenden Mengen im Körper der reellen Zahlen auf Existenz von Supremum, Infimum, Maximum und Minimum und gib dieses, falls es existiert, an.

- a) $M = \{\sqrt[n]{3} | n \in \mathbb{N}\}$
- b) $N = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 25\}$
- c) $G = \{\sqrt{x} | x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\}$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Zeige die folgenden Aussagen:

- a) $\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}^+$
- b) $(1+a)^n < \frac{1}{(1-a)^n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in (-1, 1)$

Aufgabe 4 (1+1+1 Punkte)

Berechne die folgenden imaginären Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Gib dabei Rechenschritte mit an.

- a) $(2 + i)^{-1}$
- b) $\frac{1+4i}{1-3i} + \frac{1-4i}{1+3i}$
- c) $\frac{1+i}{1-i} - (1 + 2i)(2 + 2i)$