Arik Heinss, M. Sc., Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 3. Mai 2022

Übungsblatt 6 zur Analysis I

SS 2022

Aufgabe 1 (2+1 Punkte)

a) Beweise: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Hinweis: Nehme an es gebe nur endlich viele, und führe dies in einen Widerspruch.

b) Man zeige mit vollständiger Induktion, dass 133 für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Teiler von $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist.

Aufgabe 2 (1+1 Punkte)

Wir wissen bereits, dass $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ nicht abzählbar ist.

a) Beweise: Die Menge $E_m := \{A \subset \mathbb{N} | \ \ |A| = m\} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist abzählbar für alle $m \in \mathbb{N}$.

b) Beweise: Die Menge $E_{\mathbb{N}} := \{A \subset \mathbb{N} | \ \ |A| \neq \infty\} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist abzählbar.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass es keine andere Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $m^2 = n$ (in anderen Worten: n ist keine Quadratzahl).
Beweise: Es gibt auch keine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = n$.
Hinweis: Betrachte die Primzahlzerlegung eines $m \in \mathbb{N}$. Was wissen wir über die Primzahlzerlegung von m^2 im Vergleich mit der Primzahlzerlegung von m?

Aufgabe 4 (1.5+1+1+2 Punkte)

Man zeige die nachfolgenden Aussagen ohne Rückgriff auf Ergebnisse der Vorlesung nach 2.3.11 (verwenden sie insbesondere nicht die eindeutigkeit der kardinalität einer menge).

(a) Sei M eine Menge und $a \in M$ sowie N eine Menge und $b \in N$. Weiter sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung. Dann definiert

$$g : M \setminus \{a\} \to N \setminus \{b\},\ x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \neq b, \\ f(a), & \text{falls } f(x) = b \end{cases}$$

eine bijektive Abbildung. Hinweis: Vergessen Sie nicht zu zeigen, daSS hier überhaupt eine Abbildung definiert wird.

(b) Sei N eine Menge der Kardinalität $n \in \mathbb{N}_0$, und sei $b \in N$. Dann ist $N \setminus \{b\}$ eine Menge der Kardinalität $n - 1$.

(c) Sei M eine Menge der Kardinalität $m \in \mathbb{N}_0$. Es gilt genau dann $M = \emptyset$, wenn man $m = 0$ hat.

(d) Ist M eine Menge der Kardinalität $m \in \mathbb{N}_0$ und N eine Menge der Kardinalität $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung, so gilt $m = n$. Hinweis: Führen Sie eine vollständige Induktion nach n durch.