

Übungsblatt 3 zur Analysis I

SS 2022

Aufgabe 1 (1+2 Punkte)

Sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die folgenden Aussagen für alle $x, y \in K$ gelten:

a) $0 < 1$

b) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

Schreibe in jedem Schritt, in dem eines der Anordnungsaxiome benutzt wird, dieses explizit dazu, und verwende nicht mehr als eines pro Schritt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Auf einem angeordneten Körper K definieren wir die Abbildung $|\cdot| : K \rightarrow K$ über die Vorschrift

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Zeige mithilfe der Körperaxiome, Anordnungsaxiome und den bereits bekannten Rechenregeln die Gültigkeit der folgenden Ungleichung für alle $x, y \in K$:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Hinweis: Zeige zuerst dass auf Körpern allgemein gilt $(-1) \cdot x = -x$ und zerlege das Problem dann in individuell behandelbare Fälle.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei K ein angeordneter Körper, und $M = \{x \in K \mid x < 1\}$. Zeige, dass M weder ein Minimum noch ein Maximum besitzt.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei K ein angeordneter Körper und seien $A, B \subseteq K$ zwei Teilmengen von K , die ein Supremum in K besitzen. Zeige, dass die Menge $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ nach oben beschränkt ist mit

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$