

Übungsblatt 3 zur Analysis I

SS 2022

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien A, B, W, X, Y, Z Mengen mit $X, W \subseteq A$, und $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen:

- $f(W \cap X) \subseteq f(W) \cap f(X)$
- $f(W \setminus X) \supseteq f(W) \setminus f(X)$
- Für $Y, Z \subseteq B$ gilt $f^{-1}(Y \setminus Z) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(Z)$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei A eine Menge mit zwei oder mehr Elementen, \mathcal{F} die Menge aller Funktionen $A \rightarrow A$, $\mathfrak{P}(\cdot)$ notiere die Potenzmenge.

Sind die folgenden Funktionen injektiv? Wenn ja, begründe. Wenn nein, gebe zwei Elemente im Urbild an, die auf den selben Wert abgebildet werden.

Sind die folgenden Funktionen surjektiv? Wenn ja, begründe. Wenn nein, gebe ein Element der Bildmenge an, das nicht im Bild der Funktion liegt.

- $\mathcal{C} : \mathfrak{P}(A) \rightarrow \mathfrak{P}(A), W \mapsto A \setminus W$
- $\mathcal{G} : \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{P}(A \times A), f \mapsto \{(a, f(a)), a \in A\}$
- $\mathcal{S} : \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(A) \rightarrow \mathfrak{P}(A), (V, W) \mapsto V \cap W$
- $\mathcal{I} : \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{P}(A), f \mapsto f(A)$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Zeige die folgenden Aussagen:

- Seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeige die Äquivalenz:
 f ist surjektiv \Leftrightarrow Es gibt ein $h : Y \rightarrow X$ mit $f \circ h = id_Y$
- Sei X eine Menge, und $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung mit $f(f(x)) = f(x)$ für alle $x \in X$.
Zeige die Äquivalenz:
 f ist surjektiv $\Leftrightarrow f$ ist injektiv.

Aufgabe 4 (1+2+1+1 Punkte)

Sei $(K, 0, 1, +, -, \cdot, ^{-1})$ ein Körper. Zeige dass die folgenden Aussagen für alle $x, y \in K$ gelten:

- $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$
- $(-x)y = -(xy)$
- $-(-x) = x$
- falls $x \neq 0$, dann $(x^{-1})^{-1} = x$

Man verwende in jedem Umformungsschritt jeweils nur ein Körperaxiom oder ein Ergebnis der Vorlesung und gebe dies explizit an. Hinweis: Man klammere die Terme vollständig.