Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 21. Juli 2022

Probeklausur zur Analysis I

SS 2022

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Man zeige: Folgt für $W, X \subseteq A$ mit $W \subsetneqq X$ stets $f(W) \subsetneqq f(X)$, so ist f injektiv.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Man zeige, daß

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \sqrt{\tfrac{1}{2}n^3} + 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Man untersuche $M = \{\frac{x}{x^2+1} \mid x \in (0,2) \cap \mathbb{Q}\}$ im Körper der reellen Zahlen auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum und bestimme diese gegebenenfalls.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)
Man untersuche jeweils, ob der Grenzwert der Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert und bestimme ihn gegebenenfalls.

(a) $a_n = \sqrt[2n]{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, (b) $a_n = \left(\dfrac{2n+5}{2n+3}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Die Folge $(a_n)_n$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{2a_n}}{4} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man untersuche $(a_n)_n$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6 (3 Punkte)
Seien $U, V \subseteq (0, \infty)$ offen. Man zeige, daß dann auch $M = \{uv \mid u \in U,\ v \in V\}$ offen ist.

Aufgabe 7 (3+3+3 Punkte)
Man berechne den Wert der Reihe in Teil (a), untersuche die Reihe in Teil (b) auf Konvergenz und bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe in Teil (c).

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)-1}{k!}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k - \frac{1}{k}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^3 - n^2 + 1) z^n$

Aufgabe 8 (3 Punkte)
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent mit Wert A. Weiter sei $(b_k)_k$ definiert durch $b_{2n} = a_n$ sowie $b_{2n-1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert und den Wert A hat.

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{N}, \\ 1 - x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man bestimme die Stetigkeitsstellen von f.

Aufgabe 10 (3 Punkte)
Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei $g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ gelte. Man zeige: Ist $c \in \mathbb{R}$ und gilt $f(x) \to c$ für $x \to \infty$, so gilt auch $f(g(x)) \to c$ für $x \to \infty$.

Aufgabe 11 (3 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0 und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Man zeige, daß dann $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$ in 0 differenzierbar ist und $u'(0) = f(0)g'(0)$ gilt.

Aufgabe 12 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$. Man untersuche, ob f ein Minimum besitzt, und bestimme es gegebenenfalls.

Aufgabe 13 (3+3+3 Punkte)
Man beweise oder widerlege jeweils die Aussage.

(a) Ist $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_n$ beschränkt mit Häufungspunktmenge $\{a, -a\}$, so konvergiert $(a_n^2)_n$.

(b) Ist $(a_k)_k$ unbeschränkt und divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, so divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

(c) Ist $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es genau eine stetige Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g|_{\mathbb{Q}} = f$.

Aufgabe 14 (2+2+2 Punkte)
Geben Sie die folgenden Definitionen beziehungsweise Sätze im Sinne der Vorlesung wieder. Formulieren Sie eine vollständige Aussage (wie »Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt einer reellen Folge $(a_n)_n$, wenn ... gilt«), und achten Sie darauf, daß Sie auch die Voraussetzungen korrekt angeben.

(a) Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (»AGM-Ungleichung«)

(b) Definition der bestimmten Divergenz einer Folge gegen $-\infty$

(c) Intervallschachtelungsprinzip