B 16

A 1 Bestimme den Grenzwert mithilfe von L'Hôspital

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\log(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to 1} x = 1$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x)^{(k)}}{(x^k)^{(k)}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{k!} = \frac{1}{k!}$

$(e^x)^{(k)} = e^x$

$(x^k)^{(k)} = k!$

c) $\lim_{x\downarrow 0} x^2 \log(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\log(x)}{x^{-2}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = \dots$

$= \lim_{x\downarrow 0} -\frac{1}{2} x^2 = 0$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x-\tan(x)} \overset{\text{l'Hôspital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{1-1-\tan(x)^2}$

$\overset{\text{l'Hôspital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{-(2\tan(x)(1+\tan(x)^2))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{-2\tan(x)-2\tan(x)^3}$

$\overset{\text{l'Hôspital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{-(2+2\tan(x)^2)-4\tan(x)(1+\tan(x)^2)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{-2-2\tan(x)^2-4\tan(x)-4\tan(x)^3} = -\frac{1}{2}$

$\cos(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$-2-2\tan(x)^2-4\tan(x)-4\tan(x)^3 \xrightarrow[x\to 0]{} -2$

A2

z.z: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)| < |x-y|^2$
$\Rightarrow f$ ist konstant

- Sei $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$
- Da $f'(x)$ stetig ist existiert $\delta > 0$ s.d. $|f'(y) - f'(x)| < \varepsilon$ falls $y \in (x-\delta, x+\delta)$
- Falls $\delta > \varepsilon$, setze stattdessen $\delta = \varepsilon$, so dass $\delta \leq \varepsilon$ gilt
- Es existiert (Mittelwertsatz, 6.2.4) ein $x_0 \in (x-\delta, x+\delta)$ so, dass

$$|f'(x_0)| = \left|\frac{f(x+\delta) - f(x-\delta)}{(x+\delta)-(x-\delta)}\right| \leq \left|\frac{((x+\delta)-(x-\delta))^2}{(x+\delta)-(x-\delta)}\right|$$

$$= (x+\delta)-(x-\delta) = 2\delta \leq 2\varepsilon$$

- Wegen $x_0 \in (x-\delta, x+\delta)$ gilt $\varepsilon > |f'(x) - f'(x_0)|$

Also $f'(x) \in (-3\varepsilon, 3\varepsilon)$

- Es gilt also für jedes x, jedes $\varepsilon > 0$

$$|f'(x)| \leq 3\varepsilon$$

Da ε beliebig war gilt somit $|f'(x)| = 0$

Das widerum spricht für eine konstante Funktion

A 3

Zeige: $f: (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ hat ∞ viele Punkte mit $f'(x) = 0$

Claim: f hat auf $(0,1)$ unendlich viele Nullstellen

Proof: – Wähle $x_1 = \frac{1}{4\pi}$. Es gilt offenbar $x_1 \in (0, \pi/2)$. (Wegen $3 < \pi < 4$ gilt $0 < x_1 < \frac{1}{16} < 1$, also $x_1 \in (0,1)$, und $(0,1) \subset (0, 1.5) \subset (0, \pi/2)$)

und $f(x_1) = \sin(4\pi) = 0$

– Sei x_i eine Nullstelle von f auf $(0, \frac{\pi}{2})$. Wähle $x_{i+1} = \frac{1}{1/x_i + 2\pi}$.

Dann gilt $f(x_{i+1}) = \sin(\frac{1}{x_i} + 2\pi)$ und wegen der 2π-Periodizität von sin auch $f(x_{i+1}) = \sin(\frac{1}{x_i}) = 0$

– wegen $\frac{1}{x_{i+1}} = \frac{1}{x_i} + 2\pi > \frac{1}{x_i} > 0$ gilt ausserdem $0 < x_{i+1} < x_i$, also $x_{i+1} \in (0, \pi/2)$

– Die Folge x_i ist also streng Monoton fallend (d.h. auch die Elemente sind paarweise verschieden), und für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es nach 6.2.3 (Satz von Rolle) gibt es somit $m_i \in (x_{i+1}, x_i)$ so dass $f'(m_i) = 0$ ✓

A4

Finde die Minima und Maxima von

$f(x) = x^4/4 - \frac{2x^3}{3} + \frac{\pi}{e^2}$

Lsg: $f'(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$

$f'(x) = 0$ bei $x=0$ oder $x=2$

$f''(x) = 3x^2 - 4x$

$f''(0) = 0$, $f''(2) = 12 - 8 = 4 > 0$

$f'''(x) = 6x - 4$ $f'''(0) = -4 < 0$

Nach 6.3.11 können wir so ablesen, dass -2 ein (lokales) Minimum ist, und 0 kein Extremwert.

Ist -2 globales Minimum?

$f(x) \longrightarrow \infty$ für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$

Falls es einen anderen Punkt y gäbe mit $f(y) < f(2)$, so müsste es auch $z \in (y, 2)$ (bzw $z \in (2, y)$) geben mit $f(z) = f(2)$ (Weil f stetig & Zwischenwertsatz)

Wegen f stetig und $f(z) = f(2)$ muss es ein lokales Maximum oder Minimum zwischen z und 2 geben. Wir wissen aber, dass es keine Minima/Maxima ausser 2 gibt.

$\Rightarrow$ 2 ist globales Maximum

A5

Finde die Taylorreihe zu:

a) $f(x) = \log(3+4x)$ um $x_0 = 0$

$f'(x) = \frac{4}{3+4x}$

Claim: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} 4^n}{(3+4x)^n}$ für $n \geq 1$

Proof: $f^{(1)}(x) = ①$ ✓

Claim gelte für ein $n \in \mathbb{N}$:

$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} (-1)^{n+1} (4)^n (3+4x)^{-n}$

$= (-1)^{n+1} 4^n (-4 (3+4x)^{-n-1})$

$= (-1)^{n+2} 4^{n+1} \frac{1}{(3+4x)^{n+1}}$

$\rightarrow$ Claim gilt auch für $n+1$

Per Vollst. Ind. gilt somit Claim für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

b) $g(x) = e^{-4x}$ um $x_0 = 4$

Claim: $g^{(n)}(x) = (-4)^n e^{-4x}$, $n \in \mathbb{N}_0$

IA: $g^{(0)}(x) = e^{-4x} = (-4)^0 e^{-4x}$ ✓

IV: Claim gelte für $n \in \mathbb{N}_0$

IS: $g^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} g^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} (-4)^n e^{-4x} = (-4)^{n+1} e^{-4x}$

$\rightarrow$ Claim gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(4)}{n!} (x-4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n e^{-16}}{n!} (x-4)^n$$

c) $h(x) = x^4 e^{2x^2}, \quad x_0 = 0$

$$h(x) = x^4 e^{2x^2} = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x^2)^n}{n!} = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2(n+2)}}{n!}$$

Anm: Dies ist eine Potenzreihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n$, nur dass einige der a_k Null sind