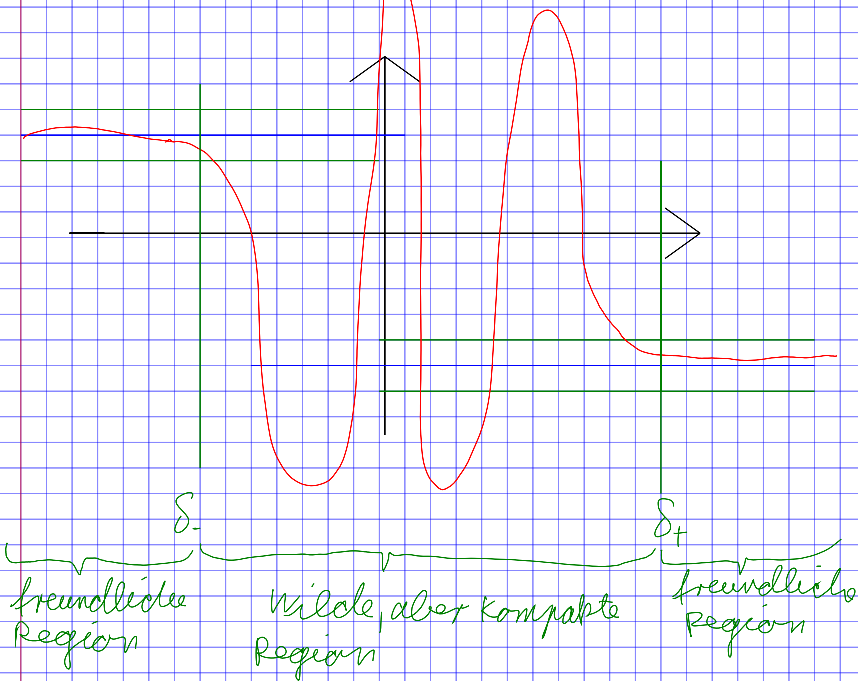
Sketch zu A1 (Kein Beweis)



A 1

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ sind endlich $\Rightarrow$ f ist Beschränkt

Proof:

Schreibe

$$L_+ = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

$$L_- = \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle δ_+, δ_- so dass

$$|f(x) - L_+| < \varepsilon \quad \text{falls } x > \delta_+$$

$$|f(x) - L_-| < \varepsilon \quad \text{falls } x < \delta_-$$

ObdA: $\delta_+ > \delta_-$

$[\delta_-, \delta_+]$ ist kompakt, also ist $f([\delta_-, \delta_+])$ kompakt, also $f([\delta_-, \delta_+]) \subseteq [a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}$

Sei $x \in \mathbb{R}$

Falls:

$x < \delta_-$:

$$L_- - \varepsilon < f(x) < L_- + \varepsilon$$

$\delta_- \leq x \leq \delta_+$:

$$a \leq f(x) \leq b$$

$x > \delta_+$:

$$L_+ - \varepsilon < f(x) < L_+ + \varepsilon$$

Auf jeden Fall:

$$\min\{L_- - \varepsilon, a, L_+ - \varepsilon\} \leq f(x) \leq \max\{L_- + \varepsilon, b, L_+ + \varepsilon\}$$

Also ist f beschränkt.

Nach dem Cauchy-Krit für Funktionen gilt es δ_-, δ_+ so, dass

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad x, y > \delta_+$$

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad x, y < \delta_-$$

Also ist f gl. stetig auf (δ_+, ∞) und $(-\infty, \delta_-)$.

Nach 5.3.10 ist f gl. stetig auf $[\delta_-, \delta_+]$

A2

a) Zeige dass f mit $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0,2]$ gleichmäßig stetig ist

Lsg: Sei $\varepsilon > 0$, benutze $\sqrt{x-y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$0 \leq y \leq x \leq 2$ mit $x - y < \delta$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} < \frac{x-y}{\sqrt{x-y}} = \sqrt{x-y} < \sqrt{\delta}$$

falls $\delta = \varepsilon^2$:

$\sqrt{x} - \sqrt{y} < \varepsilon$ ✓

ist f L-stetig? Nehme an ja, also

$\forall x \in [0,2] \quad |x - 0| = x \leq L \sqrt{x}$

$\Updownarrow$

$L = \sqrt{x} : L\sqrt{x} = x$

$L < \sqrt{x} : L\sqrt{x} < x$

$\forall x \in [0,2] \quad L \leq \sqrt{x}$

$\Rightarrow L = 0$

L-Stetigkeit erfordert aber $L > 0$. also nicht L-Stetig.

b) Zeige: g mit $g(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[1, \infty)$ L-stetig

Proof: Sei $1 \leq y \leq x$

$$x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot 2$$

Also $|g(x) - g(y)| \leq 2 \cdot |x - y|$ ✓

jede L-stetige Funktion ist außerdem gl. stetig
5.1.23

A3

Sei f gl. stetig und $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt

z.z: $f(M)$ ist beschr.

Poof:

Nehme an, $f(M)$ sei nicht beschr.

Das heisst, es gibt eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M$

so dass $f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ (ObdA: gegen $-\infty$ würde auch gehen)

Da $\overline{M}$ Kompakt ist, hat x_k eine konvergente Teilfolge. Nehme an (erneut ObdA), diese Teilfolge sei bereits x_k.

- Also ist x_k eine Cauchyfolge.

- Sei nun $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Es gibt nun $N \in \mathbb{N}$ s.d.

$$|x_k - x_l| < \delta \quad \text{für } k,l \geq N$$

- Da $f(x_k) \to \infty$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$k > N$$
$$f(x_k) > f(x_N) + \varepsilon$$

Zusammen: $|x_N - x_k| < \delta$

$$|f(x_k) - f(x_N)| > |f(x_N) + \varepsilon - f(x_N)| = \varepsilon$$

Da ε, δ wilkürlich gewählt wahren kann f nicht gleichm stetig sein. Widerspruch!

A 4

a) Zeige: falls L, M kompakt sind, so ist $d(L,M)>0$

Proof: Nehme an, $d=0$. Somit existiert eine Folge $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}} \in L\times M$ mit $|x_k - y_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

- Wegen der Kompaktheit von L, M gibt es eine Teilfolge von (x_k, y_k) so, dass x_k und y_k in L bzw M konvergent sind. Nehme an, (obdA) diese Teilfolge sei bereits (x_k, y_k).

- Also gilt $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x \in L$

  $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} y \in M$

- Wegen $|x_k - y_k| \xrightarrow[k\to 0]{} 0$ und 3.1.12 muss gelten $x=y$

  $(x = \lim(x_k) = \lim((x_k - y_k)+y_k) = \lim(x_k - y_k) + \lim(y_k) = 0+y)$

- Also gilt $x\in L$, $x\in M$

  Widerspruch zu $M\cap L = \emptyset$

b) Sei $L=(0,1)$, $M=(1,2)$, $\varepsilon>0$

Dann gilt $x = 1-\varepsilon/4 \in L$

$y = 1+\varepsilon/4 \in M$

$$|y-x| = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Somit kann $\inf\{|x-y| \mid x\in L, y\in M\}>0$ nicht stimmen.

A 5

a) Zeige $e^x = 1+x$ ist für $x>0$ unmöglich.

Bew:

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$
$$> 1+x$$

da $x^n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, x>0$

b) ZZ: $(\log(x) + \log(y))/2 < \log\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Bew:

5.4.6, S.107
5.4.9, S.108

$$\Updownarrow$$

$$\log(\sqrt{x \cdot y}) < \log\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$ Aufgrund der Monotonie von log

$$\sqrt{x \cdot y} < \frac{x+y}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$x \cdot y < \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + xy + \frac{y^2}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < (x^2 + y^2)/4$$ Wahr! ∎

c) Bestimme $\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}$.

$$\xi(x) = \frac{\exp(x) - 1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k$$

ξ ist also eine Potenzreihe, die überall konvergiert.
also gilt $\lim_{k \to \infty} \xi(x_k) = \xi(0)$ falls $x_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$$\lim_{x \to 0} \xi(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} 0^k = \frac{1}{(0+1)!} = 1$$ ✓