Musterlösung Blatt 9

A1

Wahr oder Falsch?

a) a_n und b_n konvergieren $\Leftrightarrow$ a_n+b_n und a_n-b_n konvergieren

Wahr! a_n & b_n konvergieren $\Rightarrow$ a_n+b_n und a_n-b_n konvergieren (3.1.12)

a_n+b_n und a_n-b_n konvergieren $\Rightarrow$ $2a_n=(a_n+b_n)+(a_n-b_n)$ konvergiert, $2b_n=(a_n+b_n)-(a_n-b_n)$ konvergiert

b) a_n und b_n divergieren $\Rightarrow$ a_n+b_n und a_n-b_n divergieren

Falsch! Falls $a_n = \begin{cases} -1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$ $\quad b_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$ so gilt $a_n+b_n=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, aber a_n und b_n divergieren.

(Anm.: Für beliebiges divergentes a_n konvergiert $a_n-a_n=a_n+(-a_n)$ gegen 0)

c): a_n und $(a_n b_n)$ konvergieren $\Rightarrow$ b_n konvergiert

Falsch! $a_n=1/n$, $b_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$,

a_n konvergiert, und $a_n b_n$ konvergiert, aber b_n divergiert.

(Anm: Die Aussage funktioniert, wenn wir zusätzlich fordern, dass $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, da $b_n=(a_n b_n)\cdot\left(\frac{1}{a_n}\right)$ mit $(a_n b_n)$ und $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ konvergent (Satz 3.1.12))

A2

Finde, falls existent, den Grenzwert zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $a,b>0$

Fall 1: $a>b$

$$a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n} = a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$1<1+\left(\frac{b}{a}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

und, falls $q>1$, $q\geq\sqrt[n]{q}>1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

also $\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$

$$= \lim_{n\to\infty} a \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} = a$$

Fall 2: $a=b$

$$a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n} = \sqrt[n]{2a^n} = \sqrt[n]{2}\,a \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

b) $a_n = \frac{i}{1+in}$

$$0<|a_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2+1}} < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Also gilt nach dem Sandwich-Lemma, dass $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, und somit auch $a_n \to 0$

c) $a_n = \frac{2^n}{n}$

Für $n\geq 2$ gilt:

Falls $a_n > 0$

$$a_{2n} = \frac{2^{2n}}{2n} = \frac{2^n}{2}\left(\frac{2^n}{n}\right) = 2^{n-1}a_n \geq 2\cdot a_n$$

Also, falls es ein $n\geq 2$ gibt mit $a_n>0$ finden wir beliebig viele, beliebig große a_n (betragsmäßig)

Tatsächlich gilt $a_2 = 2$.

Also ist a_n unbeschränkt.
Also ist a_n divergent (3.1.6)

d) $$a_n = \frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2} = \frac{3\cdot 3^n}{3^n+2} + \frac{2^n}{3^n+2}$$

$$\frac{2^n}{3^n+2} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\frac{3^{n+1}}{3^n+2} = 3\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$$

Da $2/3^n \to 0$

Thus, $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3\,\frac{1}{1+2/3^n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n+2}$$
$$= 3 + 0$$

Ausblick: Später mal werden sogenannte Vektornormen eine wichtige Rolle spielen. Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ definiert man die p-Norm $(p \in \mathbb{N})$ als

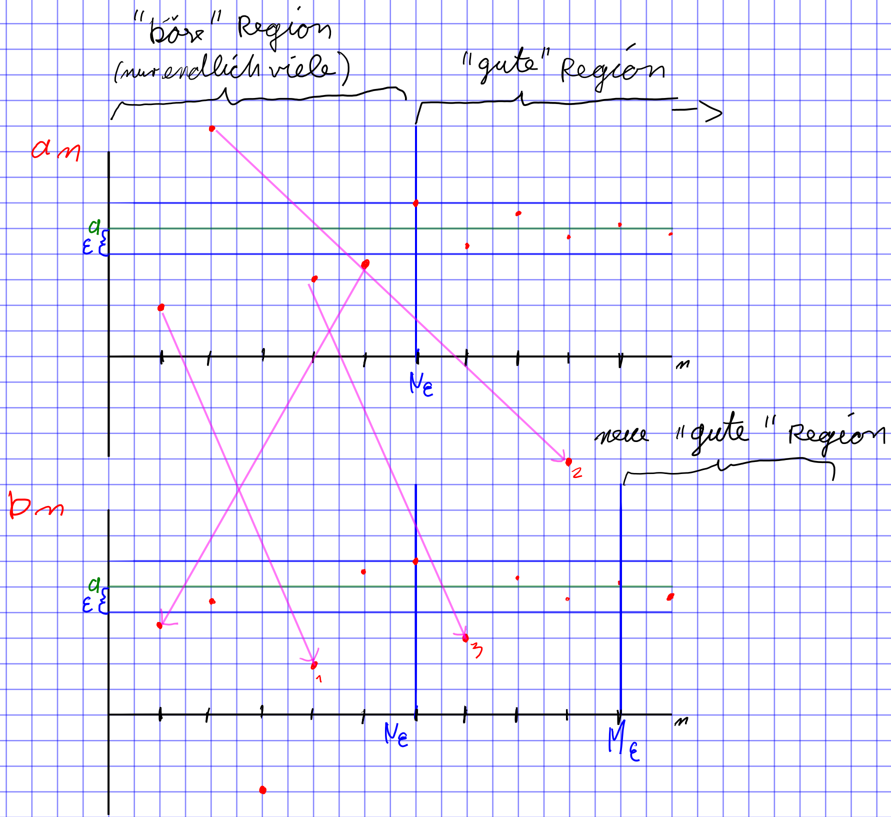
$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$$

Nach a) wissen wir jetzt, dass für $p \to \infty$ wir die Form

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$$

Als Grenzwert bekommen.

Skizze zu A 3
(Nur zum Verständnis, nicht Teil des Beweises!)



A3

z.z: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bijektiv,
$\Rightarrow$ b_n mit $b_i = a_{g(i)}$ konvergiert gegen a

- Wegen g bijektiv folgt, dass g eine inverse g^{-1} besitzt. Schreibe $h = g^{-1}$, $h(g(n)) = g(h(n)) = n$
  Es gilt: $b_n = a_{g(n)}$, $a_n = b_{h(n)}$

- Sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.d. $|a_m - a| < \varepsilon$ falls $m \geq N_\varepsilon$.

- Sei $L_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\}$. Wegen — gibt es nur endlich viele Elemente in L_ε

- Setze $M_\varepsilon = \max\{h(n) \mid n \in L_\varepsilon\}$.
  Falls $n \in L_\varepsilon$ gilt somit $h(n) \leq M_\varepsilon$
  Falls $m > M_\varepsilon$ gilt somit $g(m) \notin L_\varepsilon$,
  also $\varepsilon > |a_{g(m)} - a| = |b_m - a|$
  (für alle $m > M_\varepsilon$)

- Daraus folgt die Beh.

A 4

Es gilt: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$

z.z: $S_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

Bew:

Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt

- Wegen $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ gibt es N_ε s.d. $|a_m - a| < \varepsilon/4$ falls $m \geq N_\varepsilon$
- Sei $M > N_\varepsilon$ Es gilt

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} a_i - a = \left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} a_i - \frac{N_\varepsilon}{M} a\right) + \left(\frac{1}{M}\sum_{i=N_\varepsilon+1}^{M} a_i - \frac{M-N_\varepsilon}{M} a\right)$$

- $\left|\left(\frac{1}{M}\sum_{i=N_\varepsilon+1}^{M} a_i\right) - \frac{M-N_\varepsilon}{M} a\right| = \left|\frac{1}{M}\sum_{i=N_\varepsilon+1}^{M} (a_i - a)\right|$

$$\leq \frac{1}{M}\sum_{i=N_\varepsilon+1}^{M} |a_i - a| \leq \frac{1}{M}(M-N_\varepsilon)\,\varepsilon/4$$

- Es gilt $\lim_{M\to\infty} \frac{M-N_\varepsilon}{M}\,\varepsilon/4 \to \varepsilon/4$, also gibt es M_ε s.d. $\left|\frac{K-N_\varepsilon}{K}\,\varepsilon/4 - \varepsilon/4\right| < \varepsilon/4$ falls $K \geq M_\varepsilon$

Also gilt $0 < \frac{K-N_\varepsilon}{K}\,\varepsilon/4 < \varepsilon/2$ falls $K > M_\varepsilon$

Zusammen:

$$\left|\left(\frac{1}{K}\sum_{i=N_\varepsilon}^{K} a_i\right) - \frac{M-N_\varepsilon}{M} a\right| < \varepsilon/2 \text{ falls } K > M_\varepsilon \quad (1)$$

- Es gilt $\frac{1}{M}\sum_{1}^{N_\varepsilon} |a_i - a| \longrightarrow 0$ für $M \to \infty$

(da $\sum_{1}^{N_\varepsilon-1} |a_i - a|$ konstant)

Also existiert $L_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\frac{1}{K}\sum_{1}^{N_\varepsilon-1} |a_i - a| < \varepsilon/2 \quad (2)$$

falls $K > L_\varepsilon$.

- Sei $K \in \mathbb{N}$ s.d. $K > M_\varepsilon$ und $K > L_\varepsilon$.

So folgt

$$\left|\left(\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} a_i\right) - a\right| = \left|\left(\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} a_i\right) - \left(\frac{K-N_\varepsilon}{K} + \frac{N_\varepsilon}{K}\right) a\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{N_\varepsilon - 1}(a_i - a) + \sum_{i=N_\varepsilon}^{K}(a_i - a)\right|\right.$$

$$\leq \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{N_\varepsilon - 1}|a_i - a| + \left|\sum_{i=N_\varepsilon}^{K}(a_i - a)\right|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Also, per Definition, konvergiert M