Dr. F. Mefo Kue, Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 04. Juli 2019

Übungsblatt 15 zur Analysis I

SS 2019

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)
Man zeige: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $(\cosh x + \sinh x)^k = \cosh(kx) + \sinh(kx) \;\; \forall k \in \mathbb{N}$, (b) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + (\tanh x)(\tanh y)}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig. Man zeige, daß f einen Fixpunkt besitzt, also ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$ existiert.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)
Man untersuche jeweils den Funktionsgrenzwert auf Existenz und bestimme ihn gegebenenfalls.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \cot x, \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x - x^3/6}{3x^5}$$

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)
Man bestimme jeweils alle Stellen, in denen f differenzierbar ist, und berechne in diesen Stellen die Ableitung von f.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto x|x|$, (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto |x \sin x|$, (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

Aufgabe 5 (2+1 Punkte)
Sei $f\colon A \to B$ und a ein innerer Punkt von A. Man beweise oder widerlege jeweils die Aussage.

(a) Ist f in a differenzierbar, so

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}. \tag{1}$$

(b) Ist $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \in \mathbb{C}$, so ist f in a differenzierbar und die Gleichung (1) ist erfüllt.