Dr. F. Mefo Kue, Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 27. Juni 2019

# Übungsblatt 14 zur Analysis I

SS 2019

**Aufgabe 1 (4 Punkte)**
Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und $M \subseteq D$ beschränkt. Man zeige, daß $f(M)$ beschränkt ist.

**Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)**
Man untersuche jeweils den Funktionsgrenzwert auf Existenz und bestimme ihn gegebenenfalls.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$ für $m, n \in \mathbb{N}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 - x})$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x}$

**Aufgabe 3 (4 Punkte)**
Seien $L, M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer, und sei $d = \inf\{|x - y| \mid x \in L,\ y \in M\}$ der *Abstand* von $L$ und $M$. Man zeige: Sind $L$ und $M$ kompakt und disjunkt, so gilt $d > 0$. Man gebe ein Beispiel dafür, daß die Aussage ohne Voraussetzung der Kompaktheit falsch ist.

**Aufgabe 4 (2+3 Punkte)**

(a) Seien $x, y > 0$. Zeigen Sie, daß

$$\frac{\log x + \log y}{2} \leqslant \log\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

(b) Sei $f$: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Man beweise, daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [0, \frac{n-1}{n}]$ mit $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$ gibt.

**Aufgabe 5 (3 Punkte)**
Man gebe (mit Beweis) eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ an, so daß $f|_A$ und $f|_B$ in $0$ gegen verschiedene Grenzwerte konvergieren.