Dr. F. Mefo Kue, Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 13. Juni 2019

Übungsblatt 12 zur Analysis I

SS 2019

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2+2+2+2 Punkte)
Man untersuche jeweils die Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(-2)^n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{3/4}}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{2n}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte)
Bestimmen Sie – gegebenenfalls in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} z^k$, (b) $\sum_{k=0}^{\infty} a^{k^2} z^k$, (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{3^{2k-1}} z^k$, (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5k}{2k^2+1} z^k$

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Man gebe explizit eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ an, die bestimmt gegen ∞ divergiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Wann kann eine gegebene Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ invertiert werden? D.h. wann kann für die gegebene Potenzreihe eine Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ konstruiert werden, so dass die folgende Gleichung gilt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = 1.$$

Wenn dies möglich ist, geben Sie eine Formel für die b_n in Abhängigkeit von den a_n an. (Hinweis: verwenden Sie das Cauchy-Produkt).