Dr. F. Mefo Kue, Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 30. Mai 2019

Übungsblatt 10 zur Analysis I

SS 2019

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)
Sei $q \in (0,1)$ und $(a_n)_n$ eine Folge mit $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant q|a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Man zeige mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, daß $(a_n)_n$ konvergiert.

(b) Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_n$ die folgende rekursiv definierte Folge reeller Zahlen

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie $(a_n)_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)
Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge.

(a) Man zeige:

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (\inf\{a_k \mid k \geqslant n\}) = \sup\{\inf\{a_k \mid k \geqslant n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

(b) Sei $(a_n)_n$ die reelle Folge definiert durch $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Durch Anwendung von (a) bestimmen Sie den Limes inferior und superior von $(a_n)_n$.

Aufgabe 3 (2+2+2+2+2 Punkte)
Man berechne jeweils den Grenzwert.

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{4n}$$

$$\text{(d)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \qquad \text{(e)} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$$

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)
Man bestimme jeweils die Menge aller inneren Punkte und Häufungspunkte von M.

$$\text{(a)}\ M = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\}, \qquad \text{(b)}\ M = \mathbb{Q}$$

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)
Man beweise jeweils die Aussage.

(a) Ist $(a_n)_n$ eine Folge, so ist sie genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_N| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ existiert. (Hinweis: Benutzen Sie das Cauchy-Kriterium).

(b) Eine Folge $(a_n)_n$ ist genau dann beschränkt, wenn jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge enthält.