Dr. F. Mefo Kue, Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 23. Mai 2019

# Übungsblatt 9 zur Analysis I

SS 2019

**Aufgabe 1 (4 Punkte)**
Man betrachte die durch die Rekursionsvorschrift gegebene Folge $(a_n)_n$ mit Startwert $a_1 = 1$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{2^n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_n$ monoton steigend ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n + \frac{1}{2^n}$.

(c) Zeigen Sie, dass $(a_n)_n$ nach oben beschränkt ist.

(d) Begründen Sie, dass $(a_n)_n$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

**Aufgabe 2 (2+1 Punkte)**
Man bestimme alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in jedem Fall.

$$\text{(a)}\quad a_n = \mathrm{Re}((2 - \frac{1}{n})i^n), \qquad \text{(b)}\quad a_n = \frac{1}{n} + 2(-1)^n$$

**Aufgabe 3 (2 Punkte)**
Sei

$$a_n = \sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n}.$$

Man zeige mit der Definition, daß $a_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt, das heißt, man gebe zu jedem $M \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ an, so daß $a_n \geqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ gilt.

**Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**
Man beweise oder widerlege(mit Begründung) jeweils die Aussage.

(a) Wenn $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ divergent sind, dann ist $(a_n + b_n)_n$ divergent.

(b) Ist $(a_n)_n$ eine Folge und $M \in \mathbb{R}$ mit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n < M,$$

so gilt $a_n < M$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 5 (2+2+2+2+2+2 Punkte)**
Man untersuche in jeder Teilaufgabe die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert. Dabei sei $a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils wie im folgenden definiert.

$$\text{(a)}\quad a_n = \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2 + n}}, \qquad \text{(b)}\quad a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}), \qquad \text{(c)}\quad a_n = \sqrt[n]{n^3 + n + 1},$$

$$\text{(d)}\quad a_n = \frac{\mathrm{i}^n}{1 + \mathrm{i}n}, \qquad \text{(e)}\quad a_n = \frac{2^n}{n}, \qquad \text{(f)}\quad a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n}.$$