Dr. F. Mefo Kue, Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 16. Mai 2019

Übungsblatt 8 zur Analysis I

SS 2019

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Gegeben sei die reelle Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Man bestimme die Wertemenge von f und untersuche f auf Injektivität und Monotonie.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)
Man berechne die Nullstellen der komplexen Funktion f für $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto z^2 + (4 - 2\mathrm{i})z - 6\mathrm{i}$.

Aufgabe 3 (1+1+1 Punkte)
Man skizziere jeweils M in der komplexen Zahlenebene. Die Skizze braucht nicht begründet zu werden.

(a) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1\}$

(b) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \frac{1}{z} = 1\}$

(c) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leqslant 1\}$

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Sei

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{3n^2 + 1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige mit der Definition, daß $a_n \to \frac{1}{3}$ für $n \to \infty$ gilt, das heißt, man gebe zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, so daß $|a_n - \frac{1}{3}| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$ gilt.

Aufgabe 5 (1+2 Punkte)
Ein $z \in \mathbb{C}$ heißt algebraisch, wenn es Nullstelle einer Polynomfunktion ist, deren Koeffizienten alle in $\mathbb{Q}$ liegen und nicht alle gleich 0 sind.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Menge aller Polynomfunktionen vom Grad n abzählbar ist.

(b) Beweisen Sie, daß die Menge aller algebraische Zahlen abzählbar ist. (Hinweis: Benutzen Sie 2.6.6).