

Übungsblatt 7 zur Analysis I

SS 2019

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte)

Man untersuche jeweils M im Körper der reellen Zahlen auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum und bestimme diese gegebenenfalls.

(a) $M = \{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\},$

(b) $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 25\},$

(c) $M = \{\sqrt{x} \mid x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\}.$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ zeige man

(a) $\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b},$ falls $a, b \geq 0,$

(b) $(1+a)^n < \frac{1}{(1-a)^n},$ falls $|a| < 1.$

Aufgabe 3 (2+2+1 Punkte)

Man stelle die folgenden Teilmengen von \mathbb{R} in Intervallschreibweise dar.

(a) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid |3 - 2x| < 5\},$

(b) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq |3x - 6|\},$

(c) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x(2 - x) < 1 + |x|\}.$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

Man bestimme jeweils den Real- und Imaginärteil, Betrag und die Konjugierte von $z.$

(a) $z = \frac{(-1 + 4i)^2}{5 - 2i},$ (b) $z = \frac{1 - 4i}{1 + 3i} + \frac{1 + 4i}{1 - 3i}.$

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)

Seien $z, w \in \mathbb{C}.$ Man zeige jeweils die Aussage.

(a) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2,$

(b) $\left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| = 1 \Rightarrow |w| = 1 \text{ oder } |z| = 1.$