Dr. F. Mefo Kue, Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 2. Mai 2019

Übungsblatt 6 zur Analysis I

SS 2019

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)\binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2) - 1.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Man zeige, daß $2n^3 + 3n^2 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Man zeige: Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$ gilt

$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p = 2^n - 1$. Man zeige: Ist p eine Primzahl, so ist auch n eine Primzahl. Hinweis: Man benutze die geometrische Summenformel.

Aufgabe 5 (2+1+2 Punkte)
Sei M eine Menge der Kardinalität $m \in \mathbb{N}_0$ und N eine Menge der Kardinalität $n \in \mathbb{N}_0$. Man beweise die folgenden Behauptungen.

(a) Ist $f\colon M \to N$ injektiv, so gilt $m \leqslant n$. Hinweis: Dies ist die Aussage aus 2.3.12(a). Eine Beweisskizze dazu wurde in der Vorlesung gegeben. Führen Sie diese genauer aus.

(b) Gilt $m > n$, so existiert keine injektive Abbildung von M nach N. (Diese Aussage bezeichnet man auch als Schubfachprinzip).

(c) Die Mengen M und N sind genau dann gleichmächtig, wenn $m = n$. Beweisen Sie diese Behauptung ohne Verwendung der Aussage 2.3.12(b).

Aufgabe 6 (2 Punkte)
Seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\alpha < \beta$. Zeigen Sie, dass $[a, b]$ und $[\alpha, \beta]$ gleichmächtig sind. Hinweis: Man betrachte die Abbildung definiert durch $f(x) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a) + \alpha$ für alle $x \in [a, b]$