Dr. F. Mefo Kue, Dr. M. Ensenbach
Department Mathematik
Universität Siegen

Siegen, den 25. April 2019

Übungsblatt 5 zur Analysis I

SS 2019

Aufgabe 1 (1+2 Punkte)
Sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie mit Hilfe der Körper- und Anordnungsaxiome, dass die folgenden Aussagen für alle $x, y \in K$ gelten. Schreiben Sie bei Schritten, die ein Anordnungsaxiom benutzen, das Axiom explizit dazu. Die Körperaxiome und Folgerungen aus den Körperaxiomen können ohne Angabe verwendet werden.

$$\text{(a)} \quad 0 < 1, \qquad\qquad \text{(b)} \quad 0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei K ein angeordneter Körper, und seien $A, B \subseteq K$ zwei Teilmengen von K, die ein Supremum in K besitzen. Zeigen Sie, dass $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$ nach oben beschränkt ist mit

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)
Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für alle $x, y \in K$ und $r, s \in \mathbb{Z}$ gelten. Die Verwendung von Körper- und Anordnungsaxiomen sowie direkter Folgerungen daraus braucht nicht angegeben zu werden, aber eventuell benötigte Induktionen sind explizit durchzuführen.

$$\text{(a)} \quad x^{-s} = (x^{-1})^s, \text{ falls } x \neq 0, \qquad\qquad \text{(b)} \quad (x \cdot y)^r = x^r \cdot y^r$$

Aufgabe 4 (3+3+3+3 Punkte)
Man beweise jeweils die Gültigkeit der Gleichung beziehungsweise Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2,$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \qquad\qquad \text{(d)} \quad (2n)! < (2^n n!)^2$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Man bestimme alle $n \in \mathbb{N}$, für die die Ungleichung $2^n \geqslant n^2$ gilt. Hinweis: Man beweise für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der Ungleichung für alle $n \in \{m, m+1, \ldots\}$ und überprüfe die verbleibenden Fälle separat.

Aufgabe 6 (3 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie jeweils die gegebene Summe beziehungsweise das gegebene Produkt mit der Laufvariablen l unter Berücksichtigung der angegebenen Beziehung zu k.

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \text{ mit } l + 1 = k, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \prod_{k=-5}^{34} (k-1)(k+2) \text{ mit } 2 - l = -k$$