

## Übungsblatt 4 zur Analysis I

SS 2019

### Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Abbildungen

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto x^2 \\ \text{id}_{\mathbb{Z}} &: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto x \\ h &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto x^2.\end{aligned}$$

- (a) Man überprüfe jeweils, ob diese Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.
- (b) Was ist  $f^{-1}(\{y \in \mathbb{Z} \mid y < 0\})$ ,  $f^{-1}(\{1\})$ , und  $h^{-1}(\mathbb{Z})$ ?

### Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

- (a) Sei  $X, Y$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Zeige, daß  $f$  genau dann surjektiv ist, wenn es ein  $h : Y \rightarrow X$  mit  $f \circ h = \text{id}_Y$  gibt.
- (b) Sei  $X$  eine Menge und Sei  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung mit  $f(f(x)) = f(x)$  für alle  $x \in X$ . Man zeige, daß  $f$  genau dann injektiv ist, wenn  $f$  surjektiv ist.

### Aufgabe 3 (1+2+1+1 Punkte)

Sei  $(K, 0, 1, +, -, \cdot, ^{-1})$  ein beliebiger Körper. Zeigen Sie mit Hilfe der Körperaxiome, dass für alle  $x, y \in K$  gilt:

- (a) Hat man  $x + y = 0$ , so folgt  $x = -y$ .
- (b)  $(-x)y = -(xy)$ .
- (c)  $-(-x) = x$ .
- (d)  $(x^{-1})^{-1} = x$  falls  $x \neq 0$ .

Geben Sie die verwendeten Körperaxiome in jedem Schritt an.

### Aufgabe 4 (1+(2+2) Punkte)

- (a) Sei  $(K, 0, 1, +, -, \cdot, ^{-1}, <)$  ein angeordneter Körper und  $M = \{x \in K \mid x < 1\}$ . Man zeige, daß  $M$  weder Minimum noch Maximum besitzt.
- (b) Für die Mengen

$$A = \left\{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{\frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{Q}, x \geq 0\right\}$$

bestimme man – jeweils sofern existent – das Infimum, Supremum, Minimum und Maximum in  $\mathbb{Q}$  (mit formaler Begründung).