Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.
K. Seibert, M. Sc.

24. Mai 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2018
Blatt 7

Abgabe am **Donnerstag, dem 07. Juni 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Raum $\mathrm{C}^{(1)}([a,b])$ mit der Norm

$$\|f\|_{\mathrm{C}^{(1)}([a,b])} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad f \in \mathrm{C}^{(1)}([a,b]),$$

ein Banachraum ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= xy(x), \qquad x \in \left[0, \frac{99}{100}\right] \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

mit Hilfe der Fixpunktiteration. Weisen Sie hierbei auch die Anwendbarkeit der Fixpunktiteration nach.

Aufgabe 3: (1+3=4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die ersten partiellen Ableitungen nach allen Variablen.

a)

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} x\cos y \\ y \sin x \end{pmatrix},$$

b)

$$g(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \log\left(y^2 + e^z\right) \\ \sin\left(xy^z\right) \\ \cosh\left(\frac{xy}{z^2+2}\right) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (2·1+2·1=4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen:

(i)

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} \exp(x)\log y \\ x^2 + \sin y \\ y^x \end{pmatrix},$$

(ii)

$$g(x,y,z) := \begin{pmatrix} xyz \\ \tan y - \sqrt{xz} \end{pmatrix}.$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 - \frac{2xyz}{(x^2+1)^2} \\ \frac{z}{x^2+1} \\ \frac{y}{x^2+1} \end{pmatrix}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Bestimmen Sie eine Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass $f = \nabla F$, sofern sie existiert. F heißt Stammfunktion oder Potential von f.

(ii) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$.