Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.
K. Seibert, M. Sc.

03. Mai 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2018
Blatt 4

Abgabe bis **Mittwoch, dem 09. Mai 2018 (16 Uhr)** ins Postfach oder in EN B-210.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^3}, \quad x \neq 1,$$

lokal um den Punkt $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Die Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b],$$

Lipschitz-stetig auf I ist.

Aufgabe 3: (2+2=4 Punkte)

a) Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und seien $g, h : I \to [a, b]$ differenzierbar auf I, wobei I ein Intervall sei. Zeigen Sie, dass dann auch $K : I \to \mathbb{R}$ mit

$$K(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

differenzierbar auf I ist und $K'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$ gilt.

b) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie

$$\int_a^b (f(x) - \lambda g(x))^2 \,\mathrm{d}x \text{ mit } \lambda = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Aufgabe 4: (3+1=4 Punkte)

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f(a) = 0$. Beweisen Sie die folgende Ungleichung:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{2}\int_a^b (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3b.

b) Bestimmen Sie alle stationären Punkte (d.h. alle Nullstellen der Ableitung) der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \int_0^x (t-3)(t-4)(t+1)\mathrm{d}t.$$