Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.
K. Seibert, M. Sc.

26. April 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2018
Blatt 3

Abgabe am **Donnerstag, dem 03. Mai 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: (1+1+1+1=4 Punkte)

Berechnen Sie, falls existent, die komplexe Ableitung der Funktionen $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, 4$, gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \exp(iz), \qquad & f_2(z) = \cosh(z), \\ f_3(z) &= \sinh(z), \qquad & f_4(z) = \overline{z}. \end{aligned}$$

Falls die komplexe Ableitung nicht existiert, begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: (1+1+1+1=4 Punkte)

(Ehemalige Klausuraufgabe Mathe für Ingenieure) Gegeben sei die Funktion $f(x) := \log(e+3x)$, wobei log der Logarithmus zur Basis e ist.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.

b) Ermitteln Sie das Taylorpolynom 4. Grades von f, wenn $x_0 = 0$ das Entwicklungszentrum ist.

c) Vermuten und beweisen Sie eine Formel für die n-te Ableitung $f^{(n)}$, $n \geq 1$.

d) Stellen Sie die Taylorreihe von f auf und berechnen Sie ihren Konvergenzradius. Stimmt die Taylorreihe innerhalb des Konvergenzkreises mit f überein?

Aufgabe 3: (2+2=4 Punkte)

Sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in I$.

a) Zeigen Sie:
Hat die Zerlegung Z' p innere Punkte in I, so gilt für jede Zerlegung Z

$$s(Z) \leq s(Z \cup Z') \leq s(Z) + 2pK\delta(Z),$$
$$S(Z) \geq S(Z \cup Z') \geq S(Z) - 2pK\delta(Z),$$

wobei $\delta(Z) := \max_j \{l_j\}$.

b) Zeigen Sie:
Für jede Zerlegung Z und beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es Zwischenpunkte $\xi = (\xi_1, \dots \xi_n)$ und $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ mit

$$s(Z) \leq S(Z, \xi) < s(Z) + \varepsilon \quad \text{und} \quad S(Z) - \varepsilon < S(Z, \eta) \leq S(Z),$$

wobei

$$S(Z, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{bzw.} \quad S(Z, \eta) := \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Aufgabe 4: (1+3=4 Punkte)

Zeigen Sie:
Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkt, so gilt: f ist genau dann auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, falls für jede Zerlegungsnullfolge $(Z^{(n)})_n$ und jede Wahl passender[1] Zwischenpunkte $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)})$ die Folge der Riemann-Zwischensummen

$$S\left(Z^{(n)}, \xi^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{k_n} f\left(\xi_j^{(n)}\right) l_j^{(n)}, \quad l_j^{(n)} = x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}$$

konvergiert.
In diesem Fall konvergieren die Riemann-Zwischensummen alle gegen den gleichen Grenzwert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Bemerkung: Eine Zerlegungsnullfolge ist eine Folge von Zerlegungen, für die gilt, dass $\delta(Z^{(n)}) \to 0$ für $n \to \infty$.

[1] Hier bedeutet "passend" lediglich, dass

$$x_0^{(n)} \leq \xi_1^{(n)} \leq x_1^{(n)} \leq \xi_2^{(n)} \leq \dots \leq \xi_{k(n)}^{(n)} \leq x_{k(n)}^{(n)}$$

gelten muss.