Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.
K. Seibert, M. Sc.

19. April 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2018
Blatt 2

Abgabe am **Donnerstag, dem 26. April 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: (2+2=4 Punkte)

Die Funktion $\varphi_0 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} (1-x)^2(1+2x), & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1\,. \end{cases}$$

Für $J \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $\varphi_J : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi_J(x) = \varphi_0(2^{-J}x), \quad x \geq 0\,.$$

1. Zeigen Sie, dass gilt
   a) $\varphi_J'(x) \leq 0$ für alle $x \in]0, +\infty[$ und alle $J \in \mathbb{N}$,
   b) $\lim_{J\to\infty} \varphi_J(x) = 1$ für alle $x \in [0, +\infty[\,$.
2. Für $J \in \mathbb{N}_0$ seien die Funktionen $b_J : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

   $$b_J(x) := \varphi_{J+1}(x) - \varphi_J(x), \quad x \geq 0\,.$$

   Berechnen Sie die Extremalstellen von b_J in Abhängigkeit von J.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Beweisen Sie Bemerkung 5.2.10 aus der Vorlesung:
Die Funktion f sei $(n+1)-$mal stetig differenzierbar im Intervall $[a, b]$, d.h. $f \in \mathrm{C}^{(n+1)}([a, b])$. Die ersten n Ableitungen von f an der Stelle $x_0 \in]a, b[$ verschwinden und die $(n+1)-$te Ableitung von f sei ungleich Null, d.h.

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

1) Ist $n+1$ gerade, so gilt

$$\begin{aligned} (i)\; f^{(n+1)}(x_0) &< 0 \Rightarrow \text{ lokales Maximum bei } x_0 \\ (ii)\; f^{(n+1)}(x_0) &> 0 \Rightarrow \text{ lokales Minimum bei } x_0. \end{aligned}$$

2) Ist $n+1$ ungerade, so liegt kein lokales Extremum bei x_0 vor.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Sei P ein Polynom und x_0 mindestens eine $k-$fache Nullstelle von P $(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$. Dann gilt: x_0 ist (mindestens) eine $(k-i)-$fache Nullstelle von $P^{(i)}$ für alle $i = 0, \dots, k$.
Hinweis: Sie können den Fundamentalsatz der Algebra benutzen, wonach ein Polynom P vom Grad $n \geq 1$ stets in genau n (komplexe) Linearfaktoren zerlegt werden kann, d.h. es existieren n (nicht notwendigerweise verschiedene) Nullstellen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ und eine Konstante c, so dass

$$P(z) = c \prod_{j=1}^{n} (z - z_j).$$

Aufgabe 4: (2+2=4 Punkte)

Sei $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen $n \times m$-Matrizen, versehen mit der Maximumnorm $\|A\| := \max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\}$, wenn A die Komponenten a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, hat.

a) Zeigen Sie, dass für $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}(m \times p, \mathbb{R})$ gilt:

$$\|A \cdot B\| \leq m \cdot \|A\| \cdot \|B\|.$$

b) Für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ definiert man die Exponentialreihe

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Zeigen Sie: Die Reihe konvergiert in der Maximumnorm. (Der Grenzwert ist also eine Matrix, welche mit e^A bezeichnet wird.)
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass der Raum $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ in der Maximumnorm vollständig ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Partialsummen der obigen Exponentialreihe eine Cauchy-Folge bilden.

Bemerkung: Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ ist eine rechteckige Anordnung von reellen Zahlen mit n Zeilen und m Spalten. Das Matrixprodukt für $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ und $B = (b_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,p}} \in \mathrm{Mat}(m \times p, \mathbb{R})$ ist definiert durch

$$A \cdot B := \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,p}}.$$