Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.
K. Seibert, M. Sc.

12. Juli 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2018
Blatt 13
Keine Abgabe, Musterlösung auf der Internet-Seite erhältlich

Aufgabe 1:

Aus einem kreisförmigen Leiter mit Radius 2cm und Mittelpunkt im Ursprung sei das Teilstück herausgebrochen, das zwischen den Winkelhalbierende $y = x$ und $y = -x$ innerhalb der durch $y > 0$ gegebenen Halbebene liegt. Dieses Teilstück wird nun mit der folgenden elektrischen Ladungsdichte

$$\varrho(x, y) := \frac{x}{y} \frac{\mathrm{Cb}}{\mathrm{cm}}$$

versehen. Berechnen Sie die gesamte Ladung des Leiters.

Aufgabe 2:

Ein Stück Draht (aus homogenem Material) werde auf die Form des Graphen von $f(x) := \cosh x$, $x \in [-1, 1]$, gebogen. Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Konstruktion.

Aufgabe 3:

a) Ein Teilchen fliegt auf einer parabelförmigen Bahn, die gegeben ist durch $y = x^2$ vom Punkt $(-1, 1)$ zum Punkt $(1, 1)$ durch das Kraftfeld $f(x, y) := (x + y, x - y)^{\mathrm{T}}$. Welche Arbeit verrichtet das Teilchen auf diesem Weg?

b) Nun fliegt ein Teilchen entlang der Ellipse, die durch $4x^2 + y^2 = 4$ gegeben ist, genau einen kompletten Umlauf im Gegenuhrzeigersinn (mathematisch positiver Sinn). Welche Arbeit verrichtet es dabei im Kraftfeld $f(x, y) = (0, xy^2)^{\mathrm{T}}$? Was sagt das Ergebnis über das Kraftfeld aus?
Hinweis: Sie dürfen die folgenden Additionstheoreme benutzen:

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)), \qquad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)).$$

Aufgabe 4:

Die vektorielle Funktion f sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x_1\left(x_2^2 + x_3^2\right) + 1 \\ x_2\left(x_1^2 + x_3^2\right) \\ x_3\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 1 \end{pmatrix}$$

a) Begründen Sie, ohne eine Stammfunktion zu bestimmen, warum f ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimmen Sie nun eine Stammfunktion von f.

c) Berechnen Sie

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,1)} f \cdot \mathrm{d}x.$$