Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.
K. Seibert, M. Sc.

05. Juli 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2018
Blatt 12

Abgabe am **Donnerstag, dem 12. Juli 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: (1+1+2=4 Punkte)

Eine Kurve sei in Polarkoordinaten gegeben durch $r = \sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

a) Finden Sie eine Parametrisierung der Kurve unter Verwendung kartesischer Koordinaten.

b) Zeichnen Sie die Kurve.

c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve.

Aufgabe 2: (1+1+2=4 Punkte)

Ein Weg $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, der in $\varphi(0) = 0$ beginnt, sei wie folgt parametrisiert:

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right) \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

a) Skizzieren Sie die Kurve.

b) Weisen Sie nach, dass φ zwar differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist.

c) Zeigen Sie, dass die Kurve nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 3: (1+1+2=4 Punkte)

Eine Kurve im $\mathbb{R}^3$, die im Ursprung beginnt, sei gegeben durch

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} at(3-t^2) \\ 3at^2 \\ at(3+t^2) \end{pmatrix}$$

für eine Konstante $a \in \mathbb{R}^+$.

a) Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ der Weglänge s nach dem Parameter t.

b) Berechnen Sie die Länge des Teilstücks der Kurve, das vom Ursprung bis zum Punkt $(2a, 3a, 4a)^{\mathrm{T}}$ verläuft.

c) Bestimmen Sie den Krümmungsradius des Kurve in jedem Punkt (in Abhängigkeit des Wegparameters t).

Aufgabe 4: (3+1=4 Punkte)

a) Mit $t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ sei eine Kurve im $\mathbb{R}^3$ parametrisiert. Hierzu seien $\hat{\mathbf{t}}$ der Einheitstangentialvektor, $\hat{\mathbf{n}}$ die Einheitshauptnormale und κ die Krümmung. Ferner definieren wir die Binormale der Kurve durch $\hat{\mathbf{b}} := \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$. Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{b}}}{\mathrm{d}s}$ parallel zu $\hat{\mathbf{n}}$ ist, wobei s die Weglänge ist. Die Proportionalitätskonstante sei mit $-\tau$ bezeichnet (τ nennt man die *Torsion* der Kurve), d.h. es gilt

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{b}}}{\mathrm{d}s} = -\tau\hat{\mathbf{n}}.$$

Zeigen Sie außerdem die folgenden Identitäten:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{t}}}{\mathrm{d}s} = \kappa\hat{\mathbf{n}}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{n}}}{\mathrm{d}s} = \tau\hat{\mathbf{b}} - \kappa\hat{\mathbf{t}}.$$

b) Ein Teilchen befinde sich auf der Flugbahn $t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$. Dann bezeichnet $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{x}}(t)$ die Geschwindigkeit und $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{x}}(t)$ die Beschleunigung des Teilchens zum Zeitpunkt t. Rechnen Sie nach, dass

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}|\mathbf{v}|}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{t}} + |\mathbf{v}|^2\kappa\hat{\mathbf{n}}$$

gilt.

Bonusaufgabe 1: (4 Bonuspunkte)

Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung Z aus $a = t_0 < \cdots < t_r = b$ sei

$$\mathrm{Var}(Z; f) := \sum_{i=0}^{r-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Ist die Totalvariation

$$V_a^b(f) := \sup\{\mathrm{Var}(Z; f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

endlich, so sagt man, dass f von beschränkter Variation ist. Man setzt

$$\mathrm{BV}[a, b] := \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \,\middle|\, V_a^b(f) < +\infty \right\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\|f\|_{\mathrm{BV}[a,b]} := V_a^b(f) + |f(a)|$$

eine Norm auf $\mathrm{BV}[a, b]$ definiert. Sie müssen hierbei *nicht* zeigen, dass $\mathrm{BV}[a, b]$ ein Vektorraum ist.

Bonusaufgabe 2: (4 Bonuspunkte)

Sind von einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Werte auf dem äquidistanten Punktgitter $t_i := a + i\,\frac{b-a}{n}$, $i = 0, \ldots, n$, gegeben, so kann das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ näherungsweise mit der zusammengesetzten Trapezregel berechnet werden:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) + \frac{1}{2}\left(f(t_0) + f(t_n)\right) \right).$$

Benutzen Sie dieses numerische Verfahren mit $n = 1000$, um den Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen $a = 1{,}1$ und $b = 1$ zu berechnen. Der Einsatz eines Computers ist ausdrücklich erlaubt.