Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.
K. Seibert, M. Sc.

28. Juni 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2018
Blatt 11

Abgabe am **Donnerstag, dem 05. Juli 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Matrixnorm $\|\cdot\|$ und die Vektornorm $|\cdot|$, gegeben durch

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathrm{MAT}(n\times n, \mathbb{R}), \\ |x| &:= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad x = (x_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

verträglich sind.

Aufgabe 2: (3+1=4 Punkte)

Finden Sie einen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, für den die Gleichung

$$10(2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2 z^3 - 10y^2 z^3 = 0$$

die hinreichende Bedingung des Satzes über implizite Funktionen erfüllt, und skizzieren Sie die durch die Gleichung beschriebene Fläche global.

Aufgabe 3: (2+2=4 Punkte)

1) Bestimmen Sie den kürzesten Abstand des Punktes $(1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$ zur Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

und geben Sie den Punkt in der Ebene E an, der diesen Abstand hat.

2) Sei A eine positiv definite, symmetrische, reelle $n \times n$-Matrix und $c > 0$. Durch

$$E_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^{\mathrm{T}} A x = c \right\}$$

wird ein $(n-1)-$dimensionales Ellipsoid im $\mathbb{R}^n$ beschrieben. Zeigen Sie:
Alle Punkte $x \in E_c \subset \mathbb{R}^n$, die unter allen Elementen von E_c den (lokal) kleinsten oder größten Abstand vom Koordinatenursprung haben, sind Eigenvektoren von A, d.h. es existiert jeweils ein $\mu \in \mathbb{R}$, so dass $Ax = \mu x$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die in Definition 8.1.5.a definierte Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Bonusaufgabe: (3+1=4 Punkte)

Um den Koordinatenursprung befinde sich ein Kreis mit Radius R (Kreis 1). Am am weitesten oben liegenden Punkt von Kreis 1 wird dieser zum Zeitpunkt $t = 0$ von außen von einem weiteren Kreis (Kreis 2) berührt, der den Radius r hat. Zu Kreis 2 gehört außerdem Punkt P, der (ebenfalls zum Zeitpunkt $t = 0$) a Längeneinheiten unterhalb des Mittelpunkts von Kreis 2 liegt. Nun rollt Kreis 2 auf Kreis 1 ab, wobei die Bewegung im Uhrzeigersinn stattfindet.

a) Finden Sie eine Parameterdarstellung für die Bahn des Punkts P.

b) Für welche Konstellationen von (r, R, a) ist die Bahn geschlossen?